Keine Ahnung von Parabelgleichung aufstellen

Die Parabel soll durch
gegebene Punkte gehen!

Datei Nr. 12183

Stand 5. Februar 2023

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

1 Grundlagen

Du solltest wissen, dass diese Gleichungen Parabeln darstellen:

$$y = x^2 \qquad y = 2x^2 - 8 \qquad y = \tfrac{1}{2}x^2 - 4x + 5$$

Die allgemeine Form eine Parabelgleichung kann man so darstellen:

$$\mathbf{y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \qquad (1)$$

Dabei darf a nicht 0 sein, sonst stellt die Gleichung keine Parabel dar. b und c können beliebige Zahlen sein, auch 0.

Eine wichtige Aufgabe ist es, Kurven zu finden, die durch gegebene Punkte gehen.
Wenn man eine Parabel sucht, ist das Ziel eine Gleichung der Form (1).

In dieser Gleichung stehen drei unbekannte Koeffizienten (so nennt man die Zahlen in der Gleichung), also a, b und c. Um drei Unbekannte eindeutig bestimmen zu können, braucht man drei Gleichungen. Es gibt Ausnahmen, auf die später hinweise. Eine solche Gleichung entsteht dabei, wenn man einen Punkt, der auf der Parabel liegen soll, in die Gleichung (1) einsetzt.
Also wird klar, dass man (bis auf Ausnahmen) drei Punkte benötigt, um drei Gleichungen zu erzeugen, deren Lösung die Koeffizienten der Parabelgleichung sind.

Ich will schon auf die Ausnahme hinweisen: Wenn man drei Punkte vorgibt, die auf einer Geraden liegen, wird die Suche nach einer Parabel schief gehen, d.h. das Gleichungssystem wird uns keine brauchbare Lösung liefern. Dazu folgt später ein Beispiel.

Wir wollen jetzt gemeinsam 4 Parabeln bestimmen, zu denen wir je drei Punkte vorgeben.
Wenn du das Verfahren schon kennst, versuche es bitte, bevor du meine Lösung anschaust.

Aufgabe: **Stelle die Gleichung einer Parabel auf, die durch drei gegebene Punkte geht. Kannst du auch noch eine Zeichnung dazu anfertigen?**

(a) $A(-3\mid 1),\ B(-2\mid 4),\ C(-4\mid -4)$

(b) $A(-1\mid 5),\ B(2\mid 2),\ C(3\mid 4)$

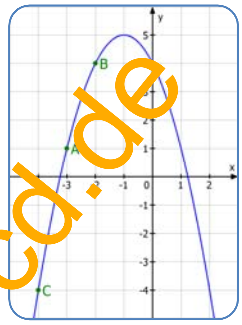
(c) $P_1(2\mid 1);\ P_2(1\mid -\tfrac{5}{2});\ P_3(-2\mid -7)$

(d) $A(1\mid -\tfrac{9}{4}),\ B(2\mid 1),\ C(-2\mid -3)$

Hier die Lösungen

Eine nach oben oder unten geöffnete Parabel **K** hat eine Gleichung der Form $y = ax^2 + bx + c$.

Darin sind die Koeffizienten a, b und c jetzt noch Unbekannte. Indem wir unsere drei Parabelpunkte in diese allgemeine Gleichung einsetzen (für x und y) erhalten wir drei Gleichungen mit den drei unbekannten Koeffizienten a, b und c:



a) $A \in K$: also $1 = 9a - 3b + c$ (1)
$B \in K$: also $4 = 4a - 2b + c$ (2)
$C \in K$: also $-4 = 16a - 4b + c$ (3)

Es gibt verschiedene Lösungsverfahren für so ein Gleichungssystem.
Hier empfehle und zeige ich das **Subtraktionsverfahren**.
Das Gleichungssystem hat nämlich ein Merkmal, das man erkennen muss:
Jeder Gleichung hat am Ende +c stehen. Dies fällt c weg, wenn man die Gleichungen voneinander subtrahiert. Durch zweimaliges Subtrahieren von zwei dieser drei Gleichungen zwei neue Gleichungen, erhält man zwei Gleichungen in denen nur noch die Unbekannten a und b stehen.
Man nennt dies „c eliminieren“. Ich mache das jetzt.

Für die Elimination von c hat man bereits mehrere Möglichkeiten:
Versuchen wir es zuerst so:

(1) – (2): $-3 = 5a \boxed{-b}$ (4)
(2) – (3): $8 = -12a \boxed{+2b}$ (5)

oder dann so:

(1) – (2): $-3 = 5a \boxed{-b}$ (4’)
(3) – (1): $-5 = 7a \boxed{-b}$ (5’)

Um zu entscheiden, welches die bessere Variante ist, müssen wir den nächsten Schritt kennen.
Wir haben zuerst c eliminiert und damit das System reduziert auf 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten a und b. Nun soll noch a oder b eliminiert werden. In der rechts stehenden Variante fällt b sofort weg, wenn wir die Gleichungen $(4')$ und $(5')$ subtrahieren, denn in beiden Gleichungen steht „-b“.
Das klappt mit der linken Variante erst nach weiteren Umformungen.
Also rechne ich rechts weiter und eliminiere b durch Subtraktion $(5') - (4')$

$$(-5) - (-3) = 7a - 5a \quad \text{bzw.} \quad -2 = 2a \quad \text{und daraus folgt } a = -1.$$

Vielleicht fragt sich der Leser, warum ich $(5') - (4')$ gerechnet habe und nicht $(4') - (5')$:
Weil bei dieser Variante das entstanden wäre:

$$(-3) - (-5) = 5a - 7a \quad \text{bzw.} \quad 2 = -2a.$$

Daraus folgt natürlich auch $a = -1$, aber „$-2a$“ „gefällt“ mir weniger gut als „2a“. Egal !

Nun fehlt noch b. Durch Einsetzen von a = -1 in (4) folgt $-3 = 5 \cdot \boxed{-1} - b$

d. h. $-3 = -5 - b$ | +5 Addition von 5 führt zu $2 = -b$ bzw. $b = -2$
Nun fehlt noch c. Diese Unbekannte erhält man, wenn man a und b in z. B. (2) ersetzt:

$$4 = -4 + 4 + c \Rightarrow c = 4$$

Ergebnis: $y = -x^2 - 2x + 4$

b) Welche Gleichung hat die Parabel durch die Punkte $A(-1|5)$, $B(2|2)$, $C(3|4)$?

Lösung

Ansatz für die Gleichung der Parabel K: $y = ax^2 + bx + c$

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten von A, B und C entstehen drei Gleichungen:

$A \in K$: also $5 = a - b + c$ (1)

$B \in K$: also $2 = 4a + 2b + c$ (2)

$C \in K$: also $4 = 9a + 3b + c$ (3)

Elimination von c (3) - (2): $2 = 5a + \boxed{b}$ (4)

(2) - (1): $-3 = 3a + 3b$ (5)

Damit bei der Subtraktion b wegfällt rechnet man in (5): $|:3$

$-1 = a + \boxed{b}$ (6)

(4) - (6): $3 = 4a$

Also: $a = \frac{3}{4}$

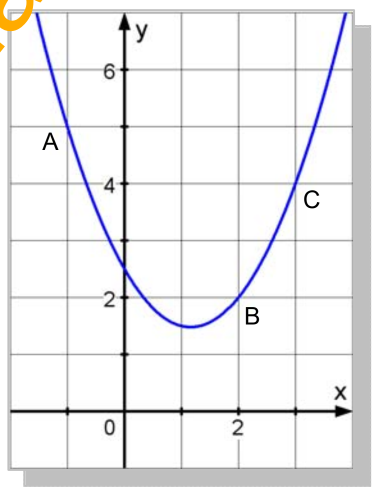
a in (6): $b = -1 - a = -1 - \frac{3}{4}$

$b = -\frac{7}{4}$

a und b in (1): $c = 5 - a + b = 5 - \frac{3}{4} - \frac{7}{4}$

$c = \frac{5}{2}$

Ergebnis: $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{4}x + \frac{5}{2}$



Ich zeige noch einen zweiten Lösungsweg:

Elimination von c (1) - (2): $3 = -3a - 3b$ (4) $|:3$

(1) - (3): $1 = -8a - 4b$ (5) $|:4$

Damit bei der Subtraktion b wegfällt muss ich zuerst beide Gleichungen anpassen.
Ich dividiere (4) durch (-3) und (5) durch (-4):

Aus (4) folgt damit $1 = -a - \boxed{b}$ (6)

Aus (5) folgt damit $\frac{1}{4} = -2a - \boxed{b}$ (7)

Jetzt eliminiert man b durch (6) – (7): $\frac{3}{4} = a \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

a in (6) ergibt denn: $1 = -\frac{3}{4} - b \Leftrightarrow \frac{7}{4} = -b \Rightarrow b = -\frac{7}{4}$

a und b in (1): $c = 5 - a + b = 5 - \frac{3}{4} - \frac{7}{4}$ also $c = \frac{5}{2}$

Dieser Weg ist anfälliger für Rechenfehler, es kommen mehr Minuszeichen vor.

c) Wir kennen von einer Parabel drei Punkte: $P_1\left(2|1\right)$; $P_2\left(1|-\frac{5}{2}\right)$; $P_3\left(-2|-7\right)$.

Berechne ihre Gleichung.

Lösung

Allgemeine Parabelgleichung: K: $y = ax^2 + bx + c$

Punktprobe für $P_1(2\,|\,1)$:	$1 = \mathbf{4a} + 2b + \mathbf{c}$	(1)
Punktprobe für $P_2(1\,|\,-\frac{5}{2})$:	$-\frac{5}{2} = a + b + c$	(2)
Punktprobe für $P_3(-2\,|\,-7)$	$-7 = \mathbf{4a} - 2b + \mathbf{c}$	(3)

Dieses Gleichungssystem enthält eine Besonderheit:

Man muss erkennen, dass beim Subtrahieren der Gleichungen (1) und (3)

a und c wegfallen: (1) – (3): $8 = 4b \Rightarrow \boxed{b = 2}$

Addiert man (1) und (3), fällt b weg: $-6 = 8a + 2c \quad |\ :2$

$-3 = 4a + c$ (4)

Setzt man b = 2 in (2) ein, erhält man: $-\frac{5}{2} = a + 2 + c$

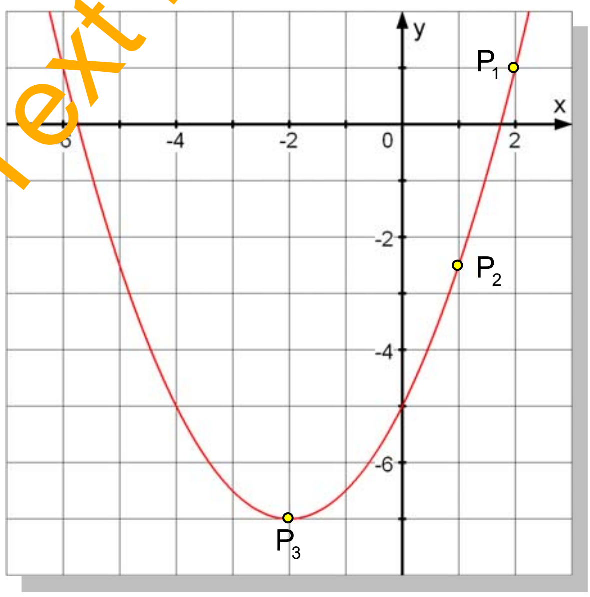
bzw. $-\frac{9}{2} = a + c$ (5)

Mit (4) und (5) besitzt man zwei Gleichungen für die Koeffizienten a und c.

Durch Subtraktion fällt c weg: (4) – (5): $\frac{3}{2} = 3a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

Setzt man dies in (5) ein, folgt c: $-\frac{9}{2} = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = -\frac{10}{2} = -5$

Ergebnis: $\boxed{y = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 5}$



d) Gegeben sind die Punkte A, B. C der Parabel K durch

$$A\left(1 \mid -\tfrac{9}{4}\right),\ B\left(2 \mid 1\right),\ C\left(-2 \mid -3\right).$$

Stelle die Parabelgleichung auf.

Lösung

Ansatz für die Gleichung der Parabel: $y = ax^2 + bx + c$

Durch Einsetzen der Punktkoordinaten von A, B und C entstehen drei Gleichungen:

$A \in K$: also $-\frac{9}{4} = a + b + c$ (1)

$B \in K$: also $1 = 4a + 2b + c$ (2)

$C \in K$: also $-3 = 4a - 2b + c$ (3)

Elimination von a und c: (2) - (3): $4 = 4$ also $b = 1$.

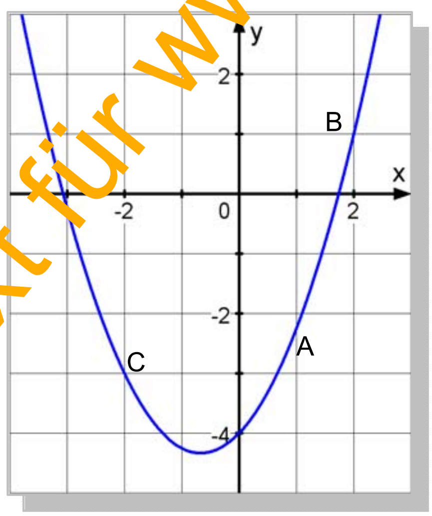
Berechnung von a: (2) - (1): $\frac{13}{4} = 3a + b$

In diese Gleichung setzen wir b = 1 ein: $\frac{13}{4} = 3a + 1 \Leftrightarrow 3a = \frac{9}{4}$

Also: $a = \frac{3}{4}$.

Gleichung (2) wird nach c aufgelöst: $c = 1 - 4a - 2b = 1 - 3 - 2 = -4$

Ergebnis: $\boxed{y = \frac{3}{4}x^2 + x - 4}$



Trainingsaufgaben

Stelle die Gleichungen der Parabeln auf, die durch diese drei Punkte gehen:

(1) $A(1|-4);\ B(2|0);\ C(3|6)$ (2) $A(1|0);\ B(2|1);\ C(4|-3)$

(3) $A(1|0);\ B(-2|6);\ C(3|1)$ (4) $A(4|0);\ B(1|-3);\ C(-1|-3)$

Lösungen am Ende des Textes

2 Andere Aufgabenstellungen.

Es gibt Aufgabenstellungen, die von den gezeigten Beispielen abweichen. Etwa diese:

Problem 1: **Gegeben sind 4 Punkte** $A(-2\,|\,5),\ B(-1\,|\,0),\ C(2\,|\,-3),\ D(1\,|\,-4)$.
Gesucht ist die Parabel, die durch diese Punkte geht.

Problem 2: **Eine Parabel hat den Scheitel** $S(-1\,|\,3)$ und geht durch $P(3\,|\,-1)$
Bestimme ihre Gleichung.

Problem 3: Gegeben sind 3 Punkte.
Warum gibt es **keine Parabel** durch diese Punkte?

Problem 1:

Liegen diese vier Punkte auf einer Parabel?
$A(-2\,|\,5),\ B(-1\,|\,0),\ C(2\,|\,-3),\ D(1\,|\,-4)$

Lösung: Wenn man diese vier Punkte in die allgemeine Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ einsetzt, erhält man vier Gleichungen mit 3 Unbekannten. Da man normalerweise dazu nur 3 Gleichungen benötigt, ist das System überbestimmt.
Man lässt also zunächst einen Punkt weg, stellt für die drei anderen die Parabelgleichung auf und macht dann für den 4. Punkt die Punktprobe.

$$\begin{array}{lll} A \in K: & \text{also} & 5 = 4a - 2b + c \quad (1) \\ B \in K: & \text{also} & 0 = a - b + c \quad (2) \\ C \in K: & \text{also} & -3 = 4a + 2b + c \quad (3) \end{array}$$

Elimination von a und c: (1) - (3): $8 = -4b \;\Rightarrow\; b = -2$

Berechnung von a: (1) - (2): $5 = 3a - b$

b einsetzen: $5 = 3a + 2 \;\Rightarrow\; 3a = 3 \;\Rightarrow\; a = 1$

a und b in (2): $0 = 1 + 2 + c \;\Rightarrow\; c = -3$

Zwischenergebnis: $y = x^2 - 2x - 3$ (4)

Überprüfung, ob D auch auf der Parabel liegt. Dazu setzt man seine Koordinaten in (4) ein:
Das ergibt: $-4 = \underbrace{1 - 2 - 3}_{-4}$, und weil das eine wahre Aussage ist, liegt auch D auf K.